Concepts et formules

EuroPerformance

Résumé

Ce document résume les notions nécessaires au calcul des ratios utilisés dans l'outil Engine d'Europerformance. On ne trouvera donc pas ici une revue théorique de ces divers concepts, mais une description de leur implémentation dans Engine.

Table des matières

Chapitre 1

Les rendements élémentaires

1.1 Définition

Dans la suite du document, nous nous appuyons sur la notion de rendement élémentaire. Un rendement élémentaire est un rendement qui appartient à une série temporelle. Par exemple, dans le calcul de la volatilité, nous utilisons une série historique de rendement élémentaires. Nous appliquons ensuite un calcul d'écart-type à cette série.

1.2 Indice de Performance

Un indice de performance est la Valeur Liquidative d'un fonds donné dont les opérations sur titre (décimalisation, coupons, etc) ont été intégrées.

On parle aussi de la série du cours du fonds. L'indice de performance en t d'un fonds sera noté IP_t

1.3 Rendement Arithmétique Brut

Le rendement arithmétique brut R entre deux dates t_i et t_j s'écrit :

$$R_{t_i,t_j} = \frac{IP_{t_j}}{IP_{t_i}}$$

1.4 Rendement Arithmétique Net

Le rendement arithmétique net RN entre deux dates t_i et t_j s'écrit :

$$RN_{t_i,t_j} = \frac{IP_{t_j}}{IP_{t_i}} - 1$$

Nous avons donc la relation suivante :

$$RN_{t_i,t_j} = R_{t_i,t_j} - 1$$

1.5 Rendement Logarithmique

Le rendement logarithmique entre deux dates t_i et t_j s'écrit :

$$L_{t_i,t_j} = ln\left(\frac{IP_{t_j}}{IP_{t_i}}\right)$$

Nous avons ainsi la relation suivante entre rendement logarithmique et rendements arithmétiques :

$$L_{t_i,t_j} = ln(R_{t_i,t_j}) = ln\left(1 + RN_{t_i,t_j}\right)$$

1.6 Normalisation d'un rendement élémentaire

Dans le calcul de certains ratios, les rendements élémentaires sont normalisés. La normalisation des performances permet de passer de l'observation des performances sur une période quelconque Δ_{t_i,t_j} à l'estimation de ce qu'aurait été cette performance sur une période donnée Δ_p, différente de la première.

Un ensemble de grandeurs observées sur des périodes Δ_{t_i,t_j} différentes deviennent ainsi comparables entre elles, une fois toutes normalisées à Δ_p. On verra que la calcul des rendements relatifs, exposé plus bas, repose sur cette homogénéisation des grandeurs.

On exprime en jours Δ_{t_i,t_j} la période de mesure originelle entre t_i et t_j ainsi que Δ_p, la période de normalisation (égale à 365 ou 360 pour une annualisation, 7 pour une normalisation hebdomadaire et $365/12 = 30.4167$ pour une normalisation mensuelle).

1.6.1 Normalisation d'un rendement arithmétique brut

Dans le cas d'un rendement arithmétique, nous travaillons avec une annualisation de forme géométrique, afin de prendre en compte l'aspect de la composition des rendements élémentaires.

$$R_{\Delta_{t_i,t_j}} = \left(\frac{IP_i}{IP_j}\right)^{\frac{\Delta_p}{\Delta_{t_i,t_j}}} = R_{t_i,t_j}^{\frac{\Delta_p}{\Delta_{t_i,t_j}}}$$

1.6.2 Normalisation d'un rendement arithmétique net

Soit $RN_{\Delta_{t_i,t_j}}$ le rendement normalisé net entre les dates t_i et t_j. On a :

$$RN_{\Delta_{t_i,t_j}} = \left(\frac{IP_i}{IP_j}\right)^{\frac{\Delta_p}{\Delta_{t_i,t_j}}} - 1 = R_{t_i,t_j}^{\frac{\Delta_p}{\Delta_{t_i,t_j}}} - 1$$

On remarque que $RN_{\Delta_{t_i,t_j}} = R_{\Delta_{t_i,t_j}} - 1$

1.6.3 Normalisation d'un rendement logarithmique

Les rendements logarithmiques ont une propriété intéressante : ils se composent en s'additionnant.

Cela a des implications au niveau de la normalisation, et donne donc la formule suivante :

$$L_{\Delta_{t_i,t_j}} = L_{t_i,t_j} . \frac{\Delta_p}{\Delta_{t_i,t_j}}$$

1.7 Les rendements relatifs

De nombreux ratios font appel à un indice de référence. Dans ce cadre, il est nécessaire de définir des rendements élémentaires relatifs à cet indice.

1.7.1 Rendement Relatif Arithmétique Net

Soit $RN_{t_i,t_j}^{F/B}$ le rendement relatif arithmétique net entre le fonds F et le benchmark B. On a :

$$RN_{t_i,t_j}^{F/B} = RN_{t_i,t_j}^{F} - RN_{t_i,t_j}^{B}$$

1.7.2 Rendement Arithmétique Relatif Brut

Soit $R_{t_i,t_j}^{F/B}$ le rendement relatif arithmétique brut entre le fonds F et le benchmark B. On a :

$$R_{t_i,t_j}^{F/B} = \frac{R_{t_i,t_j}^{F}}{R_{t_i,t_j}^{B}}$$

1.7.3 Rendements Logarithmiques Relatifs

Soit $L^{F/B}_{t_i,t_j}$ le rendement logarithmique relatif arithmétique entre le fonds F et le benchmark B. On a :

$$L^{F/B}_{t_i,t_j} = L^{F}_{t_i,t_j} - L^{B}_{t_i,t_j}$$

On remarque que : $L^{F/B}_{t_i,t_j} = ln(R^{F/B}_{t_i,t_j})$.

1.8 Les rendements relatifs normalisés

Les rendements relatifs normalisés résultent du calcul sur des séries qui sont elles mêmes normalisées (et par la même rendues comparables entre elles) : il ne s'agit donc pas de la normalisation d'un calcul sur des séries non normalisées.

1.8.1 Rendement Normalisé Arithmétique Relatif Net

Soit $RN^{F/B}_{\Delta_{t_i,t_j}}$ le rendement normalisé arithmétique relatif net entre le fonds F et le benchmark B. On a :

$$RN^{F/B}_{\Delta_{t_i,t_j}} = RN^{F}_{\Delta_{t_i,t_j}} - RN^{B}_{\Delta_{t_i,t_j}}$$

1.8.2 Rendement Normalisé Arithmétique Relatif Brut

Soit $R^{F/B}_{\Delta_{t_i,t_j}}$ le rendement normalisé arithmétique relatif brut entre le fonds F et le benchmark B. On a :

$$R^{F/B}_{\Delta_{t_i,t_j}} = \frac{R^{F}_{\Delta_{t_i,t_j}}}{R^{B}_{\Delta_{t_i,t_j}}}$$

1.8.3 Rendement Normalisé Logarithmique Relatif Brut

Soit $L^{F/B}_{\Delta_{t_i,t_j}}$ le rendement normalisé arithmétique relatif brut entre le fonds F et le benchmark B. On a :

$$L^{F/B}_{\Delta_{t_i,t_j}} = L^{F}_{\Delta_{t_i,t_j}} - L^{B}_{\Delta_{t_i,t_j}}$$

Chapitre 2

Les ratios

2.1 Convention pour la description des ratios

Par commodité, on notera dans cette partie R_i et L_i les ratio $R_{(t_{i-1},t_i)}$ et $L_{(t_{i-1},t_i)}$ respectivement.

R_i, L_i désigneront donc les $i^{\text{ème}}$ rendements élémentaires de leurs séries respectives.

2.2 Performance annualisée

La performance annualisée ramène à un an une performance constatée sur une période quelconque. Elle peut se calculer de différentes manières :

2.2.1 Performance Arithmétique Annualisée

La performance arithmétique nette Ra, basée sur des rendements constatés entre t_i et t_j s'écrit :

$$Ra = \left(\frac{IP_{t_j}}{IP_{t_i}}\right)^{\frac{365}{\Delta_{t_i,t_j}}}$$

On notera qu'il s'agit en fait de R_{Δ_p} avec $\Delta_p = 365$, c'est à dire le rendement brut normalisé à 1 an.

2.2.2 Performance Logarithmique Annualisée

La performance logarithmique nette La, basée sur des rendements constatés entre t_i et t_j s'écrit :

$$La = \ln\left(\frac{IP_{t_j}}{IP_{t_i}}\right) \times \frac{365}{\Delta_{t_i,t_j}}$$

On notera qu'il s'agit en fait de L_{Δ_p} avec $\Delta_p = 365$, c'est à dire le rendement logarithmique normalisé à 1 an.

2.2.3 Performance Relative Logarithmique Annualisée

Soit $La^{F/B}$ la performance logarithmique relative annualisée. On a :

$$La^{F/B} = La_p^F - La_p^B$$

2.3 Alpha

L'alpha désigne le surplus de performance de $L_{\Delta_p}^F$ par rapport au benchmark $L_{\Delta_p}^B$:

$$\alpha_p^{F/B} = \left(\overline{L_{\Delta_p}^F} - \beta_p^{F/B} \times \overline{L_{\Delta_p}^B}\right)\frac{365}{\Delta_p}$$

L'alpha (α) est donné par le terme constant (ou l'ordonnée à l'origine) d'une régression linéaire par les moindres carrés des log rendements du fonds F sur les log rendements du benchmark B (voir le β, résultat de cette régression, au 2.5).

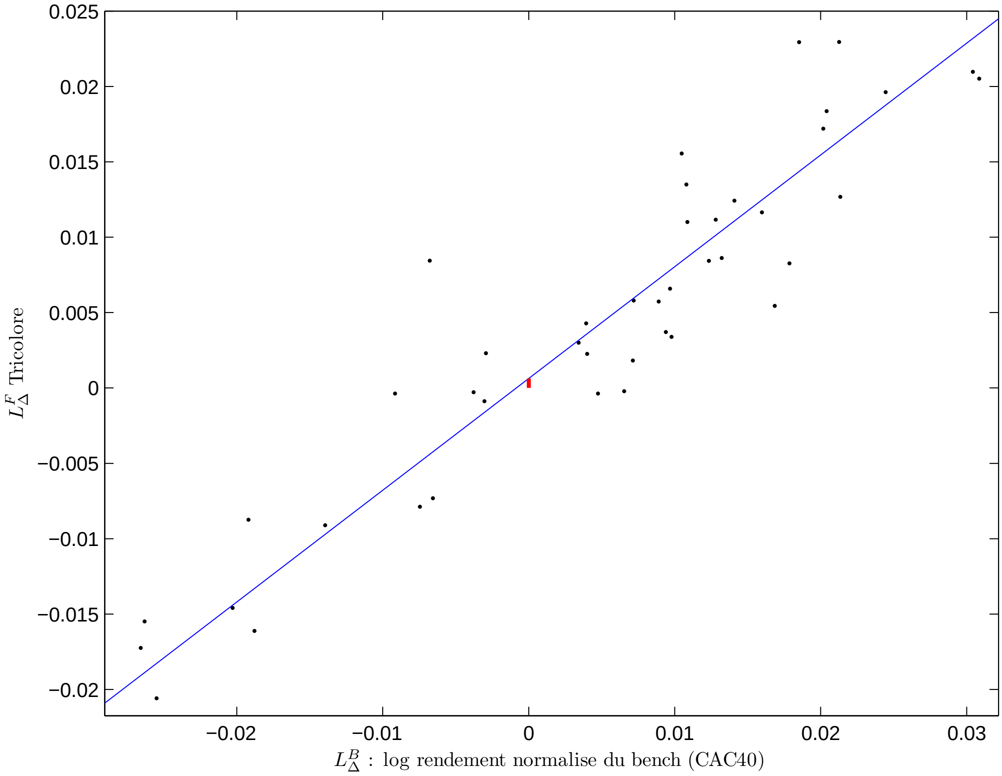
La droite résultant d'une telle régression est la Security Characteristic Line (SCL) (en bleu dans la figure 2.1), et permet de se rendre compte du comportement du fonds par rapport à son indice de référence. Le beta est représenté par la pente de la droite, et l'alpha (indiqué en rouge dans la figure) l'ordonnée à l'origine. Dans l'exemple du graphique, on voit que la SCL coupe l'axe des ordonnées au dessus de 0, ce qui implique donc un alpha positif. L'alpha peut être vu comme la part du rendement indépendante du marché sous-jacent, et qui n'est attribuable qu'aux qualité du gestionnaire. Il est donc considéré comme un indicateur de la qualité du gestionnaire.

2.4 Alpha de Jensen

L'alpha de Jensen α_J désigne le surplus de la performance $L_{\Delta_p}^{F/T}$ du fonds F par rapport à la performance $L_{\Delta_p}^{B/T}$ du benchmark B. On remarque que ces deux grandeurs sont corrigées du taux sans risque T : on pourra considérer ce ratio comme alpha corrigé du taux sans risque :

$$\alpha_{J_p}^{F/B} = \left(\overline{L_{\Delta_p}^{F/T}} - \beta_{J_p} \times \overline{L_{\Delta_p}^{B/T}}\right)\frac{365}{\Delta_p}$$

Fig. 2.1 – SCL, alpha, beta



2.5 Mesures du Beta

2.5.1 Le Beta

Le beta (β) mesure la sensibilité du rendement du fonds (ici F) par rapport à un indice de référence (ici B).

$$\beta^{F/B} = \frac{\sum_i (L^F_{\Delta_p}{}_i - \overline{L^F_{\Delta_p}})(L^B_{\Delta_p}{}_i - \overline{L^B_{\Delta_p}})}{\sum_i (L^B_{\Delta_p}{}_i - \overline{L^B_{\Delta_p}})^2}$$

avec i les indices des observations.

Le beta (β) est donné par la pente de la droite résultant d'une régression linéaire par les moindres carrés des log rendements du fonds F sur les log rendements du benchmark B (voir le β au 2.5), en laissant libre l'$alpha$ (voir 2.3).

La droite résultant d'une telle régression est la Security Characteristic Line (SCL) (en bleu dans la figure 2.1), et permet de se rendre compte de l'évolution des rendements du fonds par rapport aux rendements du benchmark : si la pente de la droite est forte ($\beta > 1.5$, par exemple), les variations de rendements du fonds répercutent et amplifient les variations du benchmark. Si la pente est faible ($\beta < 0.5$, par exemple), les variations du marché sont amorties par le fonds.

Le beta indique également la proportion du risque inhérent au fonds qui peut être attribuée au marché (voir le risque spécifique au 2.14).

2.5.2 La t-stat du β

La t-stat est un indicateur de fiabilité de la mesure sous-jacente. La t-stat du beta nous si le fonds est réellement sensible aux variations de son indice de référence. On évalue, avec la $t - stat$ du β, la probabilité que ce β soit différent de 0. La $t - stat$ égale la valeur du $beta$ sur son écart type, autrement dit le nombre d'écarts type par rapport à 0 du beta.

La question à laquelle répond cette mesure est : supposons que mes mesures du β suivent une loi normale de moyenne 0, d'écart-type connu. Quelle est la probabilité, suivant cette loi, d'observer la mesure effectivement constatée ? Si je suis loin du 0 - c'est a dire à plusieurs écarts type de celui-ci, avec une t-stat élevée - il est peu probable que mon hypothèse soit juste, et peu probable que $\beta = 0$. Si je suis près du 0 - à peu d'écarts-types de celui-ci, ce qui correspond à une t-stat faible - il est en revanche très possible que $\beta = 0$.

On donne ci dessous l'expression de la t-stat elle même, suivie de celle de son écart-type.

Expression de la t-stat :

Soit $tstat_\beta$ cette valeur, on a :

$$tstat_\beta = \frac{\beta}{std(\beta)}$$

avec $std(\beta)$ l'écart-type du β.

Calcul de $std(\beta)$:

Pour évaluer cet écart-type, on considère la régression linéaire des log rendements du fonds F sur les log rendements du benchmark B. On sait que cette régression est de coefficient β (voir 2.5) et de constante α (voir 2.3).

On a le modèle linéaire des rendements normalisés du fonds par rapport à ceux du benchmark :

$$L^F_{\Delta_p i} = \alpha + \beta L^B_{\Delta_p i} + \epsilon_i$$

avec i décrivant l'ensemble des observations sur lesquelles on a effectué la régression, ϵ les résidus de la régression.

Notons $\hat{std}(\epsilon)$ l'estimateur de l'écart-type de ces résidus ϵ. On a :

$$\widehat{std}(\epsilon) = \sqrt{\frac{\sum_i (L^F_{\Delta_p i} - (\alpha + \beta L^B_{\Delta_p i})^2)}{n-2}}$$

Soit $std(\beta)$ l'écart-type du β. On sait que :

$$std(\beta) = \frac{\hat{std}(\epsilon)}{\sqrt{\sum_i (L^B_{\Delta_p i} - \overline{L^B})}}$$

2.5.3 Beta de Jensen

Soit β_J le beta calculé sur les observations du fonds F et le benchmark B, avec un taux sans risque T

$$\beta_J = \frac{\sum_i (L^{F/T}_{\Delta_p}{}_i - \overline{L^{F/T}_{\Delta_p}})(L^{B/T}_{\Delta_p i} - \overline{L^{B/T}_{\Delta_p}})}{\sum_i (L^{B/T}_{\Delta_p i} - \overline{L^{B/T}_{\Delta_p}})^2}$$

avec i décrivant l'ensemble des observations.

On remarque que les mesures de Jensen (alpha et beta) s'opèrent sur des séries ajustées du taux sans risque T : on dit également qu'elles travaillent en prime de risque (la prime de risque étant l'excès de rendement au-delà du taux sans risque).

2.5.4 Beta bear

Soit β_{-} le beta calculé sur les observations du fonds F et du benchmark B, pour les mouvements baissiers de B :

$$\beta_{-}^{F/B} = \frac{\sum_i \mathbf{1}_A.(L^F_{\Delta_p}i - \overline{L^F_{\Delta_p}A})(L^B_{\Delta_p}i - \overline{L^B_{\Delta_p}A})}{\sum_i \mathbf{1}_A.(L^B_{\Delta_p}i - \overline{L^B_{\Delta_p}A})^2}$$

avec i décrivant l'ensemble des observations, A le sous-ensemble de celles pour lesquelles $RN^B < 0$.

Le beta bear est ainsi une mesure du beta d'un fonds par rapport à un benchmark, calculée sur les seuls mouvements baissiers. Comme pour le beta simple, une valeur élevée signifie (≥ 1.5)que les variations de rendements du fonds répercutent et amplifient les variations du benchmark, une valeur faible ($\leq .5$) que les variations du marché sont amorties par le fonds.

L'investisseur désireux d'échapper aux conséquences d'un marché baissier recherche un fonds avec un beta bear faible : il amortira les baisses du marché. Idéalement, le même fonds profite bien d'une montée de ce marché (voir 2.5.5).

2.5.5 Beta bull

Soit β_{+} le beta calculé sur les observations du fonds F et du benchmark B, pour les mouvements haussiers de B :

$$\beta_{+}^{F/B} = \frac{\sum_i \mathbf{1}_A.(L^F_{\Delta_p}i - \overline{L^F_{\Delta_p}A})(L^B_{\Delta_p}i - \overline{L^B_{\Delta_p}A})}{\sum_i \mathbf{1}_A.(L^B_{\Delta_p}i - \overline{L^B_{\Delta_p}A})^2}$$

avec i décrivant l'ensemble des observations, A le sous-ensemble de celles pour lesquelles $RN^B \geq 0$.

Le beta bull est ainsi une mesure du beta d'un fonds par rapport à un benchmark, calculée sur les seuls mouvements haussiers du benchmark. Comme pour le beta simple, une valeur élevée signifie (≥ 1.5)que les variations de rendements du fonds répercutent et amplifient les variations du benchmark, une valeur faible ($\leq .5$) que les variations du marché sont amorties par le fonds.

L'investisseur désireux de profiter d'un marché haussier recherche un fonds avec un beta bull élevé : il amplifiera les montées du marché. Idéalement, le même fonds ne souffrira pas d'une baisse de ce marché (voir 2.5.4).

2.6 Corrélation

Soit ρ le coefficient de corrélation entre les rendements logarithmiques du fonds F et de l'indice B :

$$\rho^{F/B} = \frac{\sum_i (L^F_{\Delta_p}i - \overline{L^F_{\Delta_p}})(L^B_{\Delta_p}i - \overline{L^B_{\Delta_p}})}{\sqrt{\sum_i (L^F_{\Delta_p}i - \overline{L^F_{\Delta_p}})^2} \times \sqrt{\sum_i (L^B_{\Delta_p}i - \overline{L^B_{\Delta_p}})^2}}$$

On voit qu'il s'agit du rapport entre la covariance entre le fonds F et le benchmark B et le produit de leurs écarts types. La corrélation mesure la force d'une relation linéaire entre le fonds et le benchmark.

Une corrélation extrême ($\rho = 1$ ou $\rho = -1$) signifie une dépendance linéaire entre F et B. On s'attendra alors à voir les variables évoluer proportionnellement - dans la même direction si ρ est positif, dans des directions opposées sinon.

Il est rare, hors de problèmes de démonstration, de constater une corrélation aussi élevée. On admet habituellement une relation forte entre les variables à partir de $\rho \pm 0.9$.

Si la corrélation est nulle ($\rho = 0$), il n'y aura pas de proportionnalité entre les évolutions de X et Y.

Par exemple, on constatera $\rho = 1$ entre les variables X et $2X$, $\rho = -1$ entre X et $-0.5X$, et $\rho = 0$ entre F et X^2 (voir figure 2.2).

Enfin, on remarquera que la corrélation est une mesure normalisée, indépendante des échelles dans lesquelles sont exprimées les variables.

2.6.1 Correlation bear

Soit $\rho_-^{F/B}$ le coefficient de corrélation bear entre les rendements logarithmiques du fonds F et de l'indice B, pour les mouvements baissiers de B :

$$\rho_-^{F/B} = \frac{\sum_i \mathbf{1}_A.(L^F_{\Delta_p}i - \overline{L^F_{\Delta_p}A})(L^B_{\Delta_p}i - \overline{L^B_{\Delta_p}A})}{\sqrt{\sum_i \mathbf{1}_A(L^F_{\Delta_p}i - \overline{L^F_{\Delta_p}A})^2} \times \sqrt{\sum_i \mathbf{1}_A(L^B_{\Delta_p}i - \overline{L^B_{\Delta_p}A})^2}}$$

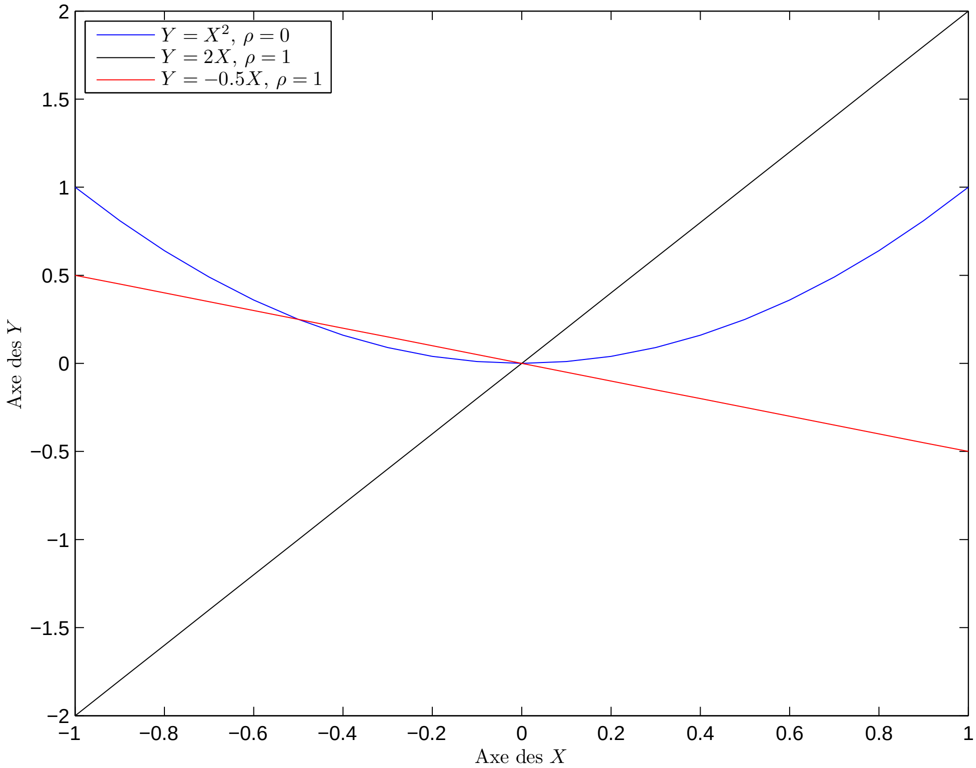
avec A l'ensemble des indices des mouvements pour lesquels $RN^B < 0$.

On voit qu'il s'agit du rapport entre la covariance entre le fonds F et le benchmark B et le produit de leurs écarts types, mesuré uniquement sur les mouvements baissiers du marché. La corrélation mesure la force d'une relation linéaire entre le fonds et le benchmark en cas de baisse du marché (voir 2.6).

L'investisseur désireux d'échapper aux conséquences d'un marché baissier recherche un fonds avec une corrélation bear faible : les rendements du fonds seront décorrélés du marché quand celui-ci baisse. Idéalement, le même fonds reste corrélé au marché quand il monte (voir 2.6.2).

Une asymétrie entre les corrélations bear et downside permet de donner une indication sur le biais (skewness) de la distribution de la variable par rapport au marché.

Fig. 2.2 – Exemples de corrélations



2.6.2 Correlation bull

Soit $\rho_+^{B/F}$ le coefficient de corrélation "bull" entre les rendements logarithmiques du fonds F et de l'indice B , pour les mouvements haussiers de B :

$$\rho_+^{F/B} = \frac{\sum_i \mathbf{1}_A (L^F_{\Delta_p i} - \overline{L^F_{\Delta_p A}})(L^B_{\Delta_p i} - \overline{L^B_{\Delta_p A}})}{\sqrt{\sum_i \mathbf{1}_A (L^F_i - \overline{L^F_{\Delta_p A}})^2} \times \sqrt{\sum_i \mathbf{1}_A (L^B_{\Delta_p i} - \overline{L^B_{\Delta_p A}})^2}}$$

avec A l'ensemble des indices des mouvements pour lesquels $RN^B \geq 0$.

On voit qu'il s'agit du rapport entre la covariance entre le fonds F et le benchmark B et le produit de leurs écarts types, mesurée uniquement sur les mouvements haussiers du marché. La corrélation mesure la force d'une relation linéaire entre le fonds et le benchmark en cas de hausse du marché (voir 2.6).

L'investisseur désireux de profiter d'un marché haussier recherche un fonds avec une corrélation bull forte : les rendements du fonds seront corréllés au marché quand celui-ci monte. Idéalement, le même fonds reste décorréllé du marché quand celui-ci baisse (voir 2.6.1).

Une asymétrie entre les corrélations bull et downside permet de donner une indication sur le biais (skewness) de la distribution de la variable par rapport au marché.

2.7 Downside risk

Soit *Downrisk* le downside risk. On a :

$$Downrisk^{F/O} = \sqrt{\frac{365}{\Delta_p}} \sqrt{\frac{\sum_i \mathbf{1}_A \left(L^F_{\Delta_p i} - \overline{L^F_{\Delta_p A}} \right)^2}{n-1}}$$

avec i décrivant l'ensemble des observations, A le sous ensemble de celles ci pour lesquelles $L^F_{\Delta_p} < L^O_{\Delta_p}$.

On remarque que, suivant cette définition, le downside risk est l'écart-type des observations pour lesquelles le rendement est inférieur à un objectif, il mesure les à-coups en dessous de l'objectif de la valeur. Plus généralement, on entend par "downside risk" une mesure du risque à la baisse d'une valeur.

Les mesures de volatilité traitent de façon identique les écarts à la hausse et à la baisse, qui se traduisent pour l'investisseur par un profit (recherché) ou une perte (évitée). Le downside risk comble cette lacune, en offrant à l'investisseur une mesure de la seule "mauvaise volatilité", c'est à dire du risque. Le ratio permet ainsi de séparer les notions de risque et de volatilité.

2.8 Drawdown

Soit $DrawDown$ la perte enregistrée entre une date initiale d'index i et une date finale d'index j.

On a :

$$DrawDown^F_{t_i,t_j} = -RN^F_{t_i,t_j}$$

avec $RN^F_{t_i,t_j} < 0$.

Le $MaxDrawDown$ (en français perte maximale) maximum des $DrawDown$, se mesure pour l'ensemble des couples $(i, j),\ i < j$ de la période d'observation.

$$MaxDrawDown^F_p = \max_{\substack{i,\ j \\ i<j}}(DrawDown^F_{i,j})$$

avec p période de normalisation.

Le maximum drawdown est la perte maximum qu'il est possible d'observer entre un point haut et un point bas ultérieur de la valorisation d'un actif. On l'utilise pour la mesure du risque d'un actif, comme la variance (3.2) ou le downside risk (2.7).

Au contraire de ces grandeurs, le Maximum Drawdown est une grandeur simple à calculer (par différence entre plafond et plancher de la période considérée), et simple à appréhender : il mesure la pire perte possible à l'intérieur d'un intervalle donné. On dispose ainsi d'une information souvent peu évidente à la lecture d'une courbe de performances. D'autre part, le maximum drawdown est une grandeur asymétrique - la volatilité par exemple, prend en compte de la même façon les variations de rendement positives et négatives, qui ont pourtant pour l'investisseur des significations bien différentes.

Notons que cette mesure est relativement sensible à la taille des intervalles de temps p considérés.

2.9 Ecart de Suivi

Communément appelé la tracking-error ; ce ratio est l'écart-type annualisé des rendements logarithmiques relatifs.

$$\tau_p = \sqrt{\frac{365}{\Delta_p}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i \left(L^{F/B}_{\Delta_p i} - \overline{L^{F/B}_{\Delta_p}} \right)^2}$$

Ici aussi, la normalisation par $\frac{365}{\Delta_p}$ implique que les rendements élémentaires L ont été normalisés à Δ_p, et que l'écart de suivi lui même est annualisé.

Ce ratio mesure la proximité entre les performances d'un portefeuille et celles de son benchmark. par exemple pour un fonds de gestion indicielle, cet écart devrait être aussi faible que possible - le fonds est supposé reproduire le comportement du benchmark. Un fonds de gestion active, au contraire, montrera un écart de suivi important.

2.10 Fréquence de gain

Soit Fg la fréquence de gain relevée sur une série comportant n périodes :

$$Fg = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_A$$

avec A l'ensemble des indices des mouvements pour lesquels les $RN_i \geq 0$.

La fréquence de gain est une mesure de la probabilité d'observer des performances positives, calculée sur données historiques. Elle donne une idée de la persistance de la performance d'un fonds, et permet ainsi d'apprécier la qualité de la gestion du fonds. On peut la calculer en performance absolue, ou relativement à un benchmark.

La moyenne des fréquences de gains prises sur un intervalle de temps donné permet d'estimer une probabilité de faire un bénéfice sur cet intervalle.

2.11 Recovery Time

Le recovery time (en français délai de recupération) est le nombre de périodes nécessaires pour récupérer des pertes subies lors d'un Maximum Drawdown.

Soient i et j respectivement les dates de début et de fin du maximum drawdown, et k les indices pour lesquels on a :

$$R_{t_j,t_k} \geq \frac{1}{R_{t_i,t_j}}$$

On a :

$$Rectime = min(k) - j$$

avec $Rectime$ le recovery time correspondant au drawdown donné $DrawDown_{i,j}$

2.12 Ratio de Calmar

Le ratio de Calmar est défini ainsi :

$$Calmar = \frac{R_{t_1,t_n}}{MaxDrawDown_{t_1,t_n}}$$

avec n le nombre de périodes élémentaires.

On voit que le ratio de Calmar est le rapport entre la performance et le maximum drawdown. L'utilisation du maximum drawdown permet d'obtenir une mesure spécifique du risque asymétrique de baisse.

Comme le ratio de Sharpe (voir 2.15), il donne une mesure de la performance corrigée du risque ; à la différence de celui-ci, le ratio de Calmar corrige la performance par une mesure de risque à la baisse, mesuré au dénominateur par le maximum drawdown (voir 2.8).

2.13 Ratio d'Information

Soit IR le ratio d'information. On a :

$$IR_p = \frac{La^{F/B}}{\tau_p}$$

avec τ l'écart de suivi (voir 2.9)

On voit que le ratio d'information est le rapport entre les rendements relatifs et la tracking error. On peut le voir comme un ratio de Sharpe (voir 2.15) calculé sur l'écart entre la performance du fonds et celle de son indice de référence. Il permet d'exprimer, en unités d'écart de suivi, l'excès de rendement du gérant par rapport à son indice de référence.

Un ratio d'information élevé signifie ainsi non seulement que le fonds dégage un excess return positif, sans consommer trop de risque relatif (de tracking-error).

Un ratio d'information de 0.3 est très correct, excellent au-delà de 0.75.

2.14 Ratio d'Information modifié

Soit IRm_p le ratio d'information modifié. On a :

$$IRm_p = \frac{\alpha}{\sigma_\epsilon}$$

avec σ_ϵ^2 le risque spécifique, défini comme la différence entre le risque total et le risque marché.

$${\sigma_\epsilon}^2 = \sigma^2 - \beta^2\sigma_B^2$$

Le ratio d'information modifié est donc le rapport entre l'alpha d'un fonds et son risque spécifique.

Il s'utilise pour mesurer la valeur ajoutée du gérant par unité de risque spécifique. Il diffère du ratio d'information "classique" en ce qu'il ne prend en compte que les parties du rendement et du risque indépendantes du marché. Une relation très importante le relie au coefficient d'information.

Le coefficient d'information représente la corrélation entre la prédiction d'une variable (la valeur du CAC 40 dans un an, par exemple), et sa réalisation. Un coefficient d'information de 1 s'interprète comme une capacité d'anticipation totale.

Une formule, connue comme la loi fondamentale de la gestion active (fundamental law of active management) indique que le coefficient d'information est égal au produit entre le ratio d'information et la racine carrée de la profondeur de marché : le nombre de paris indépendants par an.

Un ratio d'information supérieur à 0.3 est considéré comme bon.

2.15 Ratio de Sharpe

Soit T le taux sans risque, σ la volatilité, et $Sharpe$ la ratio de Sharpe :

$$Sharpe_p = \frac{La^F - La^T}{\sigma_p^F}$$

On voit que le ratio de Sharpe est le rapport entre la performance et le risque annualisés d'un fonds, en tenant compte du taux sans risque.

Choisir un fonds sur le critère du ratio de Sharpe revient à répondre à la question : "quel est le fonds qui, couplé à un actif sans risque, me donnera le meilleur rendement, pour un niveau de risque donné ?"

2.16 Ratio de Sortino

Soient T_{t_1,t_n} et F_{t_1,t_n} les séries temporelles du taux sans risque et d'un fonds, respectivement.

$$Sortino_p^F = \frac{La_{1,n}^F - La_{1,n}^T}{\sqrt{\frac{365}{\Delta_p}}\sqrt{\frac{\sum_i \mathbf{1}_A \cdot \left(L^{F/T} - \overline{L_A^{F/T}}\right)^2}{n-1}}}$$

avec $1 \leq i \leq n$ et A le sous ensemble des i pour lesquels $L^F < L^T$.

On voit que la ratio de Sortino mesure, sur des grandeurs corrigées du taux sans risque, le rapport d'une performance annualisée et d'une volatilité calculée sur les mouvements pour lesquels le fonds a sous performé le taux sans risque. Dans une utilisation plus générale, on pourra calculer ce ratio avec un taux objectif quelconque, au lieu du taux sans risque (on parlera alors de MAR, minimum acceptable return), ce qui permet de moduler le ratio suivant l'aversion au risque de l'investisseur.

Le ratio de Sortino fait partie de la famille des ratios de rendement/risque relatifs asymétriques. On parle ici d'asymétrie car la mesure de risque employée, le downside risk, ne prend en compte que les rendements inférieurs au seuil. C'est une différence importante par rapport au ratio de Sharpe (voir 2.15), par exemple.

Il est à noter que plusieurs versions du ratio de Sortino existent. Historiquement, la mesure de risque utilisée était le downside risk, mais on peut également utiliser la racine carrée du moment partiel bas d'ordre 2 (Lower Partial Moment).

2.17 Ratio de Treynor

Soit La^T la rendement logarithmique annualisé du taux sans risque et $Treynor$ la ratio de Treynor :

$$Treynor_p = \frac{La^F - La^T}{\beta^{F/B}}$$

On voit que le ratio de Treynor est le rendement constaté en excès du taux sans risques, exprimés en unités de risques du marché, représenté ici par le beta.

Comme pour les autre ratios de type rendement/risque, une valeur élevée signifie non seulement une performance positive, mais aussi des risques maîtrisés.

2.18 Semi-variance

La semi-variance σ_-^2 est l'écart-type annualisé de $L_{\Delta_p}^F$ calculé sur les n observations pour lesquelles $L_{\Delta_p}^F$ est inferieur à sa moyenne :

$$\sigma_-^2(F/B) = \sqrt{\frac{365}{\Delta_p}} \sqrt{\frac{\sum_i \mathbf{1}_A \cdot \left(L_{\Delta_p i}^F - \overline{L_{\Delta_p A}^F} \right)^2}{n-1}}$$

avec i décrivant l'ensemble des observations, A le sous ensemble de celles ci pour lesquelles $L_{\Delta_p i}^F < \overline{L_{\Delta_p}^F}$.

La semi-variance donne une mesure du risque asymétrique à la baisse de la valeur mesurée : la variance des observations inférieures à la moyenne. Elle donne une mesure du risque de la valeur observée : une semi-variance élevée signale une valeur dont le cours connait de forts à-coups à la baisse, c'est à dire risquée.

La variance, ou les mesures de volatilité, traitent de façon identique les écarts à la hausse et à la baisse. La semi-variance comble cette lacune, en offrant à l'investisseur une mesure de la seule "mauvaise volatilité". On sépare ainsi les notions de risque et de volatilité.

2.19 Skewness, kurtosis

Soit mmt_r le moment d'ordre $r \geq 2$ de x par rapport à la moyenne. On a :

$$mmt_r(x) = E\left((x_i - \overline{x})^r\right)$$

Cette grandeur permet de définir la skewness λ_1 et la kurtosis λ_2 comme les moments standardisés d'ordre 3 et 4 :

$$\gamma_1(x) = \frac{mmt_3(x)}{std(x)^3}$$

et

$$\gamma_2(x) = \frac{mmt_4(x)}{std(x)^4}$$

On peut se représenter la skewness et la kurtosis comme, respectivement, l'asymétrie de la distribution de la variable et la fréquence des évènement extrêmes.

Notons que l'on présente parfois une skewness centrée, de laquelle on retranche 3.

2.20 Value At Risk

Soit z le nombre d'écarts type correspondant aux $n^{\text{ème}}$ quantile d'une distribution normale

On a :

$$z = N^{-1}(n)$$

avec $N^{-1}(x)$ la fonction inverse de la loi normale.

Soit z_{mod} l'approximation du $n^{\text{ème}}$ quantile par la méthode de Cornish Fisher. On a :

$$z_{mod} = z + \frac{1}{6}\left(z^2 - 1\right)\gamma_1(L^F) + \frac{1}{24}\left(z^3 - 3z\right)\gamma_2(L^F) - \frac{1}{36}\left(2z^3 - 5z\right)\gamma_1(L^F)^2$$

On a enfin VaR la Value at Risk par l'approximation de Cornish Fisher :

$$VaR = \overline{L^F} + std(L^F).z_{mod}$$

La Value at Risk (VaR) est un indicateur de perte, associée à un horizon donné et à un niveau de probabilité.

La Value at Risk est un ratio de perte extrême. En finance de marché, elle est exprimée en valeur absolue (on parle d'une VaR 10 jours à 99% de 3 Millions d'Euro, par exemple), alors que dans la gestion d'actifs, la VaR d'un portefeuille est plutôt exprimée en pourcentage de perte : on parlera d'une VaR mensuelle à 99% de 15%.

Il existe de nombreuses méthodes pour calculer une Value at Risk. Le choix de la VaR dépend de nombreux facteurs, notamment de la complexité des produits, de la disponibilité de données de marchés pour les facteurs de risques, ainsi que du type de sous-jacents. La VaR Cornish-Fisher suppose que le rendement du fonds est correctement décrit par ses 4 premiers moments : sa moyenne, son écart-type, sa skewness (asymétrie de la distribution des rendements, 2.19), et la kurtosis (fréquence des évènement extrêmes, 2.19). Elle est un indicateur plus précis que la VaR normale, qui assume que les rendements sous-jacents suivent une loi normale. La VaR Cornish-Fisher donne les mêmes résultats que la VaR normale dans le cas où les rendements du fonds suivent effectivement une loi normale.

La VaR est assez simple à interpréter, dans le sens où elle s'exprime comme un rendement. Une VaR à 99% mensuelle de 15% signifie que dans 1% des cas, le rendement mensuel du fonds se trouve sous la barre des -15%

2.21 Volatilité

Notre version utilise le rendement logarithmique :

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{365}{\Delta_p}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i \left(L_{\Delta_p i} - \overline{L_{\Delta_p}}\right)^2}$$

On remarquera la normalisation par $\frac{365}{\Delta_p}$ implique que les rendements élémentaires L ont été normalisés à Δ_p, et que la volatilité elle même est annualisée.

La volatilité désigne l'écart-type annualisé des rendements d'une série historique (fonds, indice).

La volatilité quantifie le risque d'un fonds : elle donne une indication de la dispersion des rendements de ce fonds autour de la moyenne de ses rendements.

La volatilité typique d'un fonds monétaire est inférieure à 1%. Elle est de l'ordre de 0,4% (on parle également de 40 points de base de volatilité) pour ces fonds. En revanche, la volatilité d'un fonds actions, classe d'actif plus risquée, est souvent largement supérieure à 10%.

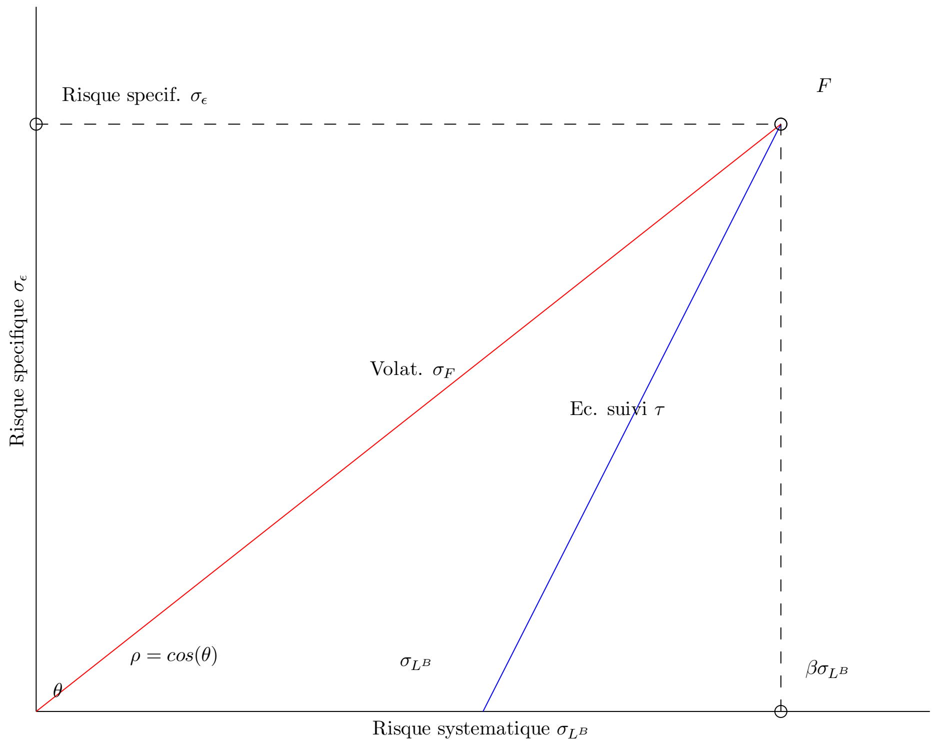
La volatilité n'est pas constante au cours du temps. Elle est liée à l'agitation du marché, et à l'incertitude de celui-ci. La volatilité est également dépendante de la fréquence de rendement utilisée, ainsi que de l'horizon considéré.

Une volatilité de 5%, sur un fonds ayant comme rendement moyen 3%, s'interprète de la manière suivante : il y a 95% de chances que le rendement annuel du fonds, l'année prochaine, soit entre 3% - 1,64 × 5% et 3% + 1,64 × 5%, en supposant que les rendements du fonds suivent une loi normale.

Il est à noter que pour les fonds pratiquant une gestion très active, de type performance absolue, la volatilité n'est pas forcément le seul indicateur de risque à considérer : elle ignore en effet les risques extrêmes.

On trouvera dans la figure (2.3) les relations que cette notion entretient avec le risque spécifique, l'écart de suivi et le β.

FIG. 2.3 – Volatilité, risque spécifique, systématique, écart de suivi β



Chapitre 3

Les ratios de durée d'investisement

On a vu le calcul de ratios sur des performances élémentaires, souvent hebdomadaire ou mensuelle. Or, l'horizon d'un investisseur est souvent plus lointain, 2 ou 5 ans. Quelle importance accorder alors à des ratios construits sur une mesure hebdomadaire, beaucoup plus courte ? Les fluctuations à court terme de la valeur ne risquent elles pas de fausser la vision long terme que l'investisseur recherche ?

D'autre part, le calcul des ratio annualisés (comme par exemple la ratio de Sharpe) repose sur des hypothèses fortes et controversées : les performances élémentaires suivent une marche aléatoire, chaque mouvement indépendant des autres. De telles hypothèses ignorent des phénomènes effectivement constatés : le marché connaît des cycles et des tendances.

Le module "Analyse de Gain" d'Engine permet de construire des ratios sur des périodes plus grandes que les périodes élémentaires. Ces grandes durées correspondent mieux à l'horizon de l'investisseur, et permettent, correctment réglées, de gommer le phénomène des cycles.

Ils font appel à la notion de période mobile d'investissement : une durées, définie par l'utilisateur égale à plusieurs périodes élémentaires (semaines ou mois).

Engine calculera alors une performance sur toutes les périodes mobiles d'investissement d'une période considérée. Ces périodes se chevauchent : si l'on prend l'exemple d'une période mobile de 3 périodes élémentaires :

- la 1ère période d'investissement comprendra les périodes élémentaires 1, 2 et 3,
- la 2ème période d'investissement, les périodes élémentaires 2, 3 et 4,
- la 3ème période d'investissement, les périodes élémentaires 3, 4 et 5,

Les courbes ont un aspect d'autant plus régulier que la période d'investissement sélectionnée est longue, car leur mode de calcul est, en fait, similaire à celui d'une moyenne mobile.

3.1 Les graphiques de rendements

Les graphiques d'historiques associent à chaque taille de période mobile d'investissement les maxima, minima et median de toutes les période calculées sur une période considérée.

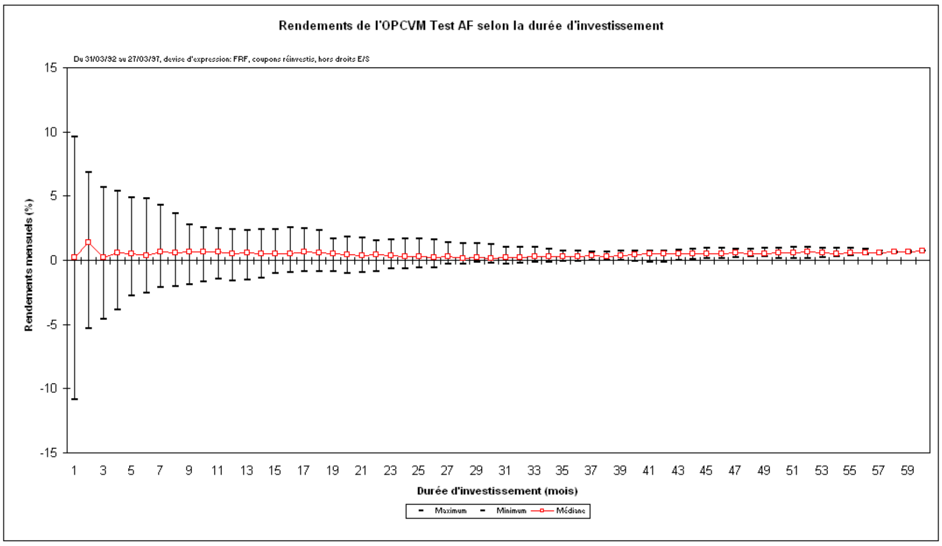
Par exemple, l'abscisse 3 d'un tel graphe comprend les minimum, maximum et médian de toutes les périodes mobiles d'investissement de taille 3 qu'il a été possible de construire dans la période considérée.

Cela permet de calculer un ratio par par durée d'investissement, ce qui permet de répondre à 2 questions - souvent posées, mais qui n'avaient pas, jusqu'a présent trouvé réponse quantifiée :

- performance et risque sont étroitement liés mais le risque ne diminue-t-il pas avec la durée d'investissement ? et, si tel est le cas, dans quelle mesure ?
- chance et compétence sont étroitement mêlées dans les résultats d'un gestionnaire mais l'aspect compétence ne finit-il pas par l'emporter ? et, si tel est le cas, dans quelle mesure ?

Les graphiques de rendements mini-médian-maxi montrent que l'éventail des performances tend à se rétrécir à mesure que la durée d'investissement augmente : le facteur chance (ou malchance) s'atténue pour mieux faire apparaître la réalité de l'investissement ou de la gestion.

FIG. 3.1 – Graphique de rendement

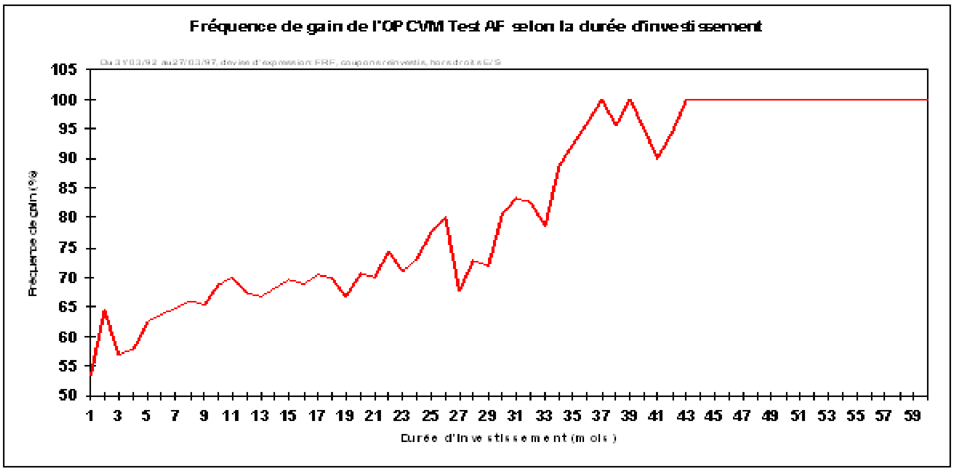


3.2 Les graphiques de fréquence de gain

On construit les graphiques de gain - comme les graphiques de rendement - en utilisant des périodes mobiles d'investissement. Ainsi, le graphique de fréquence de gain présentera, à l'abscisse 3 la fréquence de gain de toutes les périodes mobiles d'investissement de taille 3 qu'il a été possible de construire sur la période considérée.

Le graphique met ainsi l'accent sur le risque de perte, et permettent de décider si le risque, calculé sur des données historiques, se réduit avec la durée d'investissement, et dans quelle proportion.

FIG. 3.2 – Graphique de gain



Annexe

On rappelle ici quelques notions statistiques de base.

Quantiles, médiane

Soit F_X la fonction de répartition (aussi *cdf* : cumulative distribution function) d'une variable aléatoire X. On a :

$$F_X = P[X \leq x]$$

Pour tout $0 \leq q \leq 1$, on appelle $F^{-1}(q)$ le q-ième quantile de X. La médiane est le demi ($q = 0.5$) quantile.

Cela signifie que la distribution de X montre autant d'éléments au dessus de la médiane qu'en dessous. La médiane donne une mesure "centrale" de la distribution de X qui n'est pas affectée par les mesures extrêmes.

La moyenne

Soit $\overline{x}$ la moyenne des n observations d'une variable x :

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

On notera $\overline{x_A}$ la moyenne des $n \leq N$ observations

$$\overline{x_A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_A \times x_i$$

avec $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice, $|A| = n$

La variance et l'écart-type

Soit $var(x)$ l'estimation de la variance de x.

On a :

$$var(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(x_i - \overline{x})}{n-1}$$

et, avec $std(x)$ l'écart-type de x :

$$std(x) = \sqrt{var(x)}$$

La fonction indicatrice

Soit $\mathbf{1}_A : \ B \ \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction indicatrice de l'appartenance à l'ensemble A, sous ensemble de B.

On a :

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \not\in A \end{cases}$$

C'est à dire que la fonction égale 1 pour les indices éléments de A et 0 sinon.

Index